FICHE 23 Résolution d'une équation

▸ **Équation du premier degré à une inconnue :** $ax + b = cx + d$ (où a, b, c, d désignent des nombres réels, $a \neq c$)

$4x - 1 = x - 13$ On soustrait x à chaque membre : $4x - 1 - x = x - 13 - x$

$3x - 1 = -13$ On ajoute 1 à chaque membre : $3x - 1 + 1 = -13 + 1$

$3x = -12$ On divise chaque membre par 3 : $\dfrac{3x}{3} = \dfrac{-12}{3}$

$x = -4$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-4\}$.

▸ **Équation produit nul ou quotient nul**

$(2x - 5)(x + 4) = 0$ équivaut à

$2x - 5 = 0$ ou $x + 4 = 0$, soit $x = \dfrac{5}{2}$ ou $x = -4$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-4\,;\dfrac{5}{2}\right\}$.

$\dfrac{3x+1}{x-2} = 0$ équivaut à $3x + 1 = 0$ et $x - 2 \neq 0$,

c'est-à-dire $x = -\dfrac{1}{3}$ et $x \neq 2$.

Or $-\dfrac{1}{3} \neq 2$ donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

▸ **Équation** $x^2 = a$ (a désigne un nombre réel)

- Si $a > 0$, l'équation admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, l'équation admet une seule solution 0.
- Si $a < 0$, l'équation n'admet pas de solution.

Deux calculs

- Calculer $A = 5 - 3 \times (-2)^3$.

$A = 5 - 3 \times (-8) = 5 + 24 = 29$

- Factoriser $B = 4x^2 - 1$.

$B = 4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x + 1)(2x - 1)$

★

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

a. $7x + 2 = -3x - 5$ **b.** $-4x - 3 = 2x - 7$

a.	b.
$7x + 2 = -3x - 5$	$-4x - 3 = 2x - 7$
$10x + 2 = -5$	$-6x - 3 = -7$
$10x = -7$	$-6x = -4$
$x = -\dfrac{7}{10}$ $\quad \mathcal{S} = \left\{-\dfrac{7}{10}\right\}$	$x = \dfrac{2}{3}$ $\quad \mathcal{S} = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

2 Compléter sans effectuer de calcul.

a. $(x - 4)(x + 3) = 0$ Les solutions sont 4 et -3.

b. $3x(-x - 1) = 0$ Les solutions sont 0 et -1.

3 Expliquer pourquoi l'équation $(x + 5)^2 = 0$ a une seule solution. Indiquer cette solution.

Seul le carré de 0 est égal à 0, donc l'équation $(x + 5)^2 = 0$ équivaut à $x + 5 = 0$. Sa solution est -5.

4 Compléter.

$(3x - 1)(-x + 3) = 0$ équivaut à :

$3x - 1 = 0$ ou $-x + 3 = 0$

c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{3}$ ou $x = 3$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{3}\,; 3\right\}$

5 Compléter.

$\dfrac{2x+3}{x+1} = 0$ équivaut à $2x + 3 = 0$ et $x + 1 \neq 0$,

c'est-à-dire $x = -\dfrac{3}{2}$ et $x \neq -1$

Or, $-\dfrac{3}{2} \neq -1$; l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

6 Résoudre l'équation $\dfrac{-3x+6}{x-3} = 0$.

$\dfrac{-3x+6}{x-3} = 0$ équivaut à $-3x + 6 = 0$ et $x - 3 \neq 0$,

c'est-à-dire $x = \dfrac{-6}{-3} = 2$ et $x \neq 3$.

Or, $2 \neq 3$; l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{2\}$.

7 Résoudre mentalement dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

a. $x^2 = 9$ **b.** $x^2 = 2$ **c.** $x^2 = -4$

$x = 3$ ou $x = -3$ $\quad x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ $\quad$ Pas de solution

★★

8 Résoudre ce problème, trouvé sur le papyrus de Rhind (1650 avant J.-C.).

Une quantité et son septième additionnés deviennent 19. Quelle est la quantité ?

1. Choix de l'inconnue

Que cherche-t-on ? Une quantité

On note x cette inconnue.

2. Mise en équation

Quelle équation traduit la situation ? $x + \dfrac{1}{7}x = 19$

3. Résolution de l'équation

$x + \dfrac{1}{7}x = 19$ équivaut à $\dfrac{7}{7}x + \dfrac{1}{7}x = 19$

c'est-à-dire $\dfrac{8}{7}x = 19$. Ainsi, $x = 19 \times \dfrac{7}{8} = \dfrac{133}{8}$

4. Conclusion

La quantité cherchée est $\dfrac{133}{8}$.

FICHE 24 Équations se ramenant à une équation du premier degré

▸ Pour résoudre certaines équations, on peut penser à regrouper tous les termes dans un membre, à développer, à factoriser… On se ramène alors à une équation de type connu (voir p. 33).

L'équation $\frac{8}{x} = 2$ équivaut successivement à

$8 = 2x$ et $x \neq 0$

$x = 4$ et $x \neq 0$

Or $4 \neq 0$, donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{4\}$.

L'équation $x^2 = 3x$ équivaut successivement à

$x^2 - 3x = 0$ ⟵ On regroupe les termes en x.

$x(x-3) = 0$ ⟵ On factorise $x^2 - 3x$ pour se ramener à une équation produit nul.

$x = 0$ ou $x = 3$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0; 3\}$.

Deux calculs

• Donner l'écriture fractionnaire de $A = 3^{-2} + 2^{-3}$.

$A = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{8}{72} + \frac{9}{72} = \frac{17}{72}$

• On donne une liste de nombres : 1 ; 2 ; 7 ; a ; 6. Déterminer mentalement le nombre a pour que la moyenne de ces cinq nombres soit égale à 4.

$\frac{1+2+7+a+6}{5} = 4$ équivaut à $a + 16 = 20$ soit $a = 4$.

★

1 **a.** Vérifier que -2 est une solution de l'équation :

$$4x^2 + 8x = 0.$$

$4 \times (-2)^2 + 8 \times (-2) = 4 \times 4 - 16 = 16 - 16 = 0.$

Ainsi, -2 est bien une solution de l'équation.

b. Factoriser $4x^2 + 8x$. $4x^2 + 8x = 4x(x + 2)$

c. En déduire, par calcul mental, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $4x^2 + 8x = 0$. $\mathcal{S} = \{-2; 0\}$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

a. $x^2 - 16 = 0$ **b.** $25 - 4x^2 = 0$

a. $x^2 - 16 = 0$ équivaut à $(x + 4)(x - 4) = 0$ c'est-à-dire :

$x + 4 = 0$ ou $x - 4 = 0$

$x = -4$ ou $x = 4$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-4; 4\}$.

b. $25 - 4x^2 = 0$ équivaut à $5^2 - (2x)^2 = 0$ c'est-à-dire $(5 + 2x)(5 - 2x) = 0$ soit :

$5 + 2x = 0$ ou $5 - 2x = 0$

$x = -\frac{5}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\}$.

3 Résoudre l'équation $\frac{5}{x} = -4$.

L'équation $\frac{5}{x} = -4$ équivaut à $-4x = 5$ et $x \neq 0$,

c'est-à-dire $x = -\frac{5}{4}$ et $x \neq 0$.

Or, $-\frac{5}{4} \neq 0$; l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$.

★★

4 Pour tout nombre réel x, on donne l'expression

$$A(x) = (x + 3)(3x - 5) - (x + 3)(x - 2).$$

a. Factoriser $A(x)$.

$A(x) = (x + 3)[(3x - 5) - (x - 2)]$

$A(x) = (x + 3)(3x - 5 - x + 2) = (x + 3)(2x - 3)$

b. En déduire la résolution de l'équation $A(x) = 0$.

L'équation $(x + 3)(2x - 3) = 0$ équivaut à

$x + 3 = 0$ ou $2x - 3 = 0$ c'est-à-dire $x = -3$ ou $x = \frac{3}{2}$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-3; \frac{3}{2}\right\}$

5 Ramener l'équation $(x - 1)(x + 3) - (x + 5)(x - 2) = 0$ à une équation du 1er degré, en développant le membre de gauche, puis la résoudre dans $\mathbb{R}$.

L'équation $(x - 1)(x + 3) - (x + 5)(x - 2) = 0$

équivaut à $x^2 + 3x - x - 3 - (x^2 - 2x + 5x - 10) = 0$

c'est-à-dire $x^2 + 3x - x - 3 - x^2 + 2x - 5x + 10 = 0$

Ainsi, $-x + 7 = 0$ soit $x = 7$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{7\}$.

6 Expliquer pourquoi l'équation $(x - 5)^2 - (x - 3)^2 = 0$ est équivalente à $-2(2x - 8) = 0$, puis la résoudre dans $\mathbb{R}$.

L'équation $(x - 5)^2 - (x - 3)^2 = 0$ équivaut à

$[(x - 5) + (x - 3)]\,[(x - 5) - (x - 3)] = 0$

c'est-à-dire $(x - 5 + x - 3)(x - 5 - x + 3) = 0$

soit $-2(2x - 8) = 0$.

Ainsi, $2x - 8 = 0$ (car $-2 \neq 0$) c'est-à-dire $x = 4$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{4\}$.

7 Résoudre l'équation $\frac{5x - 1}{x - 2} = 2$.

• $x - 2 = 0$ équivaut à $x = 2$ donc 2 est la valeur interdite. On résout l'équation dans $\mathbb{R} - \{2\}$.

• Pour $x \neq 2$, l'équation $\frac{5x - 1}{x - 2} = 2$ équivaut à

$5x - 1 = 2(x - 2)$ c'est-à-dire $5x - 1 = 2x - 4$.

Ainsi, $3x = -3$ c'est-à-dire $x = -1$.

Or, $-1 \neq 2$; l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-1\}$.